Tentamen Numerieke Wiskunde 2
6 december 2002

Tijd: 9.00-12.00 uur

N.B. De notatie van het boek van Burden en Faires is aangehouden tenzij anders aangegeven.

Opgave 1

Beschouw het begin-randwaarde probleem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a(x)u - b(x)$$

voor x in $[0,1]$, $t \geq 0$ met $u(0,t) = u(1,t) = 0$ en $u(x,0)$ gegeven.

a. Toon aan dat een standaard ruimte-discretisatie van het probleem het volgende stelsel gewone differentiaalvergelijkingen oplevert:

$$\frac{dv}{dt} = Av - b,$$

waarin

$$\begin{aligned} (Av)_1 &= (v_2 - 2v_1)/h^2 - a(jh)v_1, \\ (Av)_j &= (v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1})/h^2 - a(jh)v_j \text{ for } j = 2, ..., m-2, \\ (Av)_{m-1} &= (-2v_{m-1} + v_{m-2})/h^2 - a(jh)v_{m-1} \end{aligned}$$

en $b_j = b(x_j)$ met $h = 1/m$ en m een geheel getal. Hoe ziet de locale afbreekfout er voor deze discretisatie uit?

b. Localiseer de eigenwaarden van de matrix A gedefinieerd in het vorige onderdeel met behulp van de stelling van Gerschgorin voor het geval $a(x) = x$.

c. Geef een voorbeeld van een tweede-orde twee-traps Runge-Kutta methode en geef aan wat het voordeel van zo'n methode is ten opzichte van een Taylor methode.

d. Toon aan dat de door u in het vorige onderdeel gegeven methode toegepast op $y' = \lambda y$ met $y(0) = y_0$ als oplossing heeft $w_i = (1 + z + z^2/2)^i y_0$, waarin $z = k\lambda$ (k is hier de stapgrootte, dus $w_i \approx y(ik)$).

e. Geef de begrenzing op de tijdstap wanneer het systeem onder a wordt opgelost met de door u onder c gegeven Runge-Kutta methode.

f. Zou de in de vorige onderdelen gesuggereerde aanpak gebruikt kunnen worden om het stelsel $Av = b$ op te lossen? (argument(en) geven!)

Z.O.Z.

Opgave 2

a. Laat $w, d \in R^m$. Stel dat geldt $(I - 2ww^T)d = [\alpha, 0, ..., 0]^T$ en $||w||_2 = 1$ met α een nog nader te bepalen scalair. Geef α en w.

b. Bepaal het conditiegetal (gebaseerd op de oneindignorm) van de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}.$$

Wat wordt met het conditiegetal aangegeven?

c. Zij A een reële matrix van orde $n \gg 10$ en neem aan dat de eigenwaarden genummerd zijn van groot naar klein en dat in het bijzonder $|\lambda_{10}| > |\lambda_{11}|$. Toon aan dat de eigenwaarden van de matrix B_i in het volgende iteratievoorschrift convergeren naar de 10 in absolute zin grootste eigenwaarden van A:

$$\begin{aligned} &Z_0 \text{ gegeven.} \\ &\text{Doe voor } i = 0, 1, 2, ... \\ &\quad Q_i R_i = Z_i \\ &\quad Z_{i+1} = AQ_i \\ &\quad B_i = Q_i^T Z_{i+1} \end{aligned}$$

Hierin bestaat Z_0 uit 10 random vectoren ter lengte n, Q_i uit 10 orthogonale vectoren en zijn de R_i bovendriehoeksmatrices van de orde 10.

Opgave 3

Beschouw voor functies u uit $C_0^2[0,1]$ functies u de integraal

$$I[u] = \int_0^1 (1 + x)[u'(x)]^2 - 2u(x)dx.$$

a. Geef het hieraan gerelateerde randwaardeprobleem inclusief de randvoorwaarden dat ontstaat na minimalisatie van $I[u]$ over $C_0^2[0,1]$.

b. Geef het lineaire systeem dat ontstaat na minimalisatie van $I[u]$ over alle functies van de vorm $u(x) = ax + bx^2$ en bepaal a en b.

c. Beschrijf hoe een benaderende oplossing van het probleem onder a kan worden verkregen met de eindige elementen methode.